

形式下三角矩阵环上的 n -Ding 模*

张文汇, 刘婷

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070

摘要: 讨论形式下三角矩阵环 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 上的 n -Ding 模 (其中 A, B 是环, U 是 (B, A) -双模)。证明了: (i) 设 U_A 有有限的平坦维数, ${}_B U$ 是平坦模。若 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 n -Ding 投射左 T -模, 则 M_1 是 $(n-1)$ -Ding 投射左 A -模, φ^M 是单同态, 并且 $M_2/\text{Im } \varphi^M$ 是 n -Ding 投射左 B -模; (ii) 设 T 是右凝聚环, ${}_B U$ 是平坦模, U_A 是有限表示模且有有限的投射维数。若 $W = (W_1, W_2)_{\varphi^W}$ 是 n -Ding 内射右 T -模, 则 W_1 是 $(n-1)$ -Ding 内射右 A -模, $\widetilde{\varphi^W}$ 是满同态, 并且 $\text{Ker } \widetilde{\varphi^W}$ 是 n -Ding 内射右 B -模。

关键词: 形式下三角矩阵环; n -Ding 投射模; n -Ding 内射模

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137 (2022) 04-0151-09

n -Ding modules over formal lower triangular matrix rings

ZHANG Wenhui, LIU Ting

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: n -Ding modules are investigated under the formal lower triangular matrix ring $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$, where A and B are rings, U is a (B, A) -bimodule. It is proved that (i) If U_A has finite flat dimension, ${}_B U$ is flat and $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ is a n -Ding projective left T -module, then M_1 is a $(n-1)$ -Ding projective left A -module, φ^M is a monomorphism, and $M_2/\text{Im } \varphi^M$ is a n -Ding projective left B -module; (ii) If T is a right coherent ring, ${}_B U$ is flat, U_A is finitely presented and has finite projective dimension and $W = (W_1, W_2)_{\varphi^W}$ is a n -Ding injective right T -module, then W_1 is a $(n-1)$ -Ding injective right A -module, $\widetilde{\varphi^W}$ is an epimorphism, and $\text{Ker } \widetilde{\varphi^W}$ is a n -Ding injective right B -module.

Key words: formal lower triangular matrix ring; n -Ding projective module; n -Ding injective module

20世纪90年代, Enochs等^[1-2]引入了Gorenstein投(内)射模和Gorenstein平坦模, 这三类模及其维数理论构成了Gorenstein同调代数的理论核心。近年来, 随着Gorenstein同调理论的进一步丰富发展, 出现了许多有重要理论意义的研究成果。2009年, 丁南庆和毛立新先后引入Gorenstein FP -内射模和强Gorenstein平坦模, 这分别是特殊的Gorenstein内射模和Gorenstein投射模^[3-4]。之后, Gillespie将这两类模重新命名为Ding投射模和Ding内射模^[5]。2015年, 唐曦在交换的Noether环上引入了 n -Gorenstein投射模和 n -Gorenstein内射模的概念, 并且研究了这两类模的同调性质^[6]。

* 收稿日期: 2020-05-22 录用日期: 2021-03-05 网络首发日期: 2022-01-07

基金项目: 国家自然科学基金(11861055)

作者简介: 张文汇(1977年生), 女; 研究方向: 环的同调理论; E-mail: zhangwh@nwnu.edu.cn

通信作者: 刘婷(1994年生), 女; 研究方向: 环的同调理论; E-mail: 2571602897@qq.com

本文所提到的环均指有单位元的非零结合环, 模均指西模。

令 A, B 是两个环, U 是 (B, A) -双模, 构造下三角矩阵环 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ u & b \end{pmatrix} \mid a \in A, b \in B, u \in U \right\}$,

其加法按通常的定义, 对 T 中的任意元素 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ u & b \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a' & 0 \\ u' & b' \end{pmatrix}$, 定义乘法为 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ u & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ u' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ua' + bu' & bb' \end{pmatrix}$, 则 T 关于普通矩阵的加法和上述乘法构成一个环, 并称之为形式下三角矩阵环^[7]。形式三角矩阵环在 Artin 代数的表示理论和环理论中起到了重要的作用。近年来, 许多学者对形式三角矩阵环上的模及其同调性质进行了研究。1999年, Haghany 和 Varadarajan 研究了形式三角矩阵环的一般性质, 并讨论了这类环上的投射模和内射模^[7-8]。2013年, 章璞给出了三角矩阵 Artin 代数上, Gorenstein 投射模的刻画^[9]。2014年, Enochs 等在形式三角矩阵环 T Gorenstein 正则的条件下, 给出左 T -模是 Gorenstein 投(内)射模的等价刻画^[10]。2019年, 毛立新去掉环条件的限制, 在文献[11]中给出形式三角矩阵环 T 上左 T -模是 Ding 投射模(右 T -模是 Ding 内射模)的等价刻画。

受以上文献的启发, 我们讨论形式下三角矩阵环上 n -Ding 模的刻画及其同调性质。称左 R -模 M 是 Ding 投射模, 如果存在投射模的正合列 $\mathbf{P}: \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P_{-1} \rightarrow P_{-2} \rightarrow \cdots$, 使得 $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P_{-1})$, 且对任意平坦左 R -模 F , 序列 $\text{Hom}_R(\mathbf{P}, F)$ 正合; 称左 R -模 E 是 FP -内射模, 如果对任意有限表示左 R -模 H , $\text{Ext}_R^1(H, E) = 0$; 称左 R -模 N 是 Ding 内射模, 如果存在内射模的正合列 $\mathfrak{S}: \cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_{-1} \rightarrow I_{-2} \rightarrow \cdots$, 使得 $N \cong \text{Im}(I_0 \rightarrow I_{-1})$, 且对任意 FP -内射左 R -模 E , 序列 $\text{Hom}_R(E, \mathfrak{S})$ 正合。对于环 R , 用 $\text{LM}(R)$ ($\text{RM}(R)$) 表示左(右) R -模范畴, ${}_R M(M_R)$ 表示左(右) R -模 M , 用 $\text{pd}M(\text{fd}M, FP\text{-id}M)$ 表示 R -模 M 的投射(平坦, FP -内射)维数。模 M 的示性模 $M^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, \mathbb{Z} 表示整数集, $H_i(X)$ 表示复形 X 的第 i 次同调群。

设 Ω 是范畴, 其对象是三元组 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 其中 $M_1 \in \text{LM}(A)$, $M_2 \in \text{LM}(B)$ 且 $\varphi^M: U \otimes_A M_1 \rightarrow M_2$ 是左 B -模同态。任意对象 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 到 $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 的态射是同态对 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, 其中 $f_1 \in \text{Hom}_A(M_1, N_1)$, $f_2 \in \text{Hom}_B(M_2, N_2)$ 且满足下图交换

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_A M_1 & \xrightarrow{1 \otimes f_1} & U \otimes_A N_1 \\ \varphi^M \downarrow & & \downarrow \varphi^N \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}$$

由文献[12]的定理 1.5 可知 $\text{LM}(T)$ 与 Ω 等价。本文仍以三元组的形式表示左 T -模。任取 $\text{LM}(T)$ 中的对象 $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 由伴随同构 $\text{Hom}_A(M_1, \text{Hom}_B(U, M_2)) \cong \text{Hom}_B(U \otimes_A M_1, M_2)$, 对任意 $u \in U, m \in M_1$, 定义 $\widetilde{\varphi}^M: M_1 \rightarrow \text{Hom}_B(U, M_2)$ 的作用为 $\widetilde{\varphi}^M(m)(u) = \varphi^M(u \otimes m)$ 。显然 $\widetilde{\varphi}^M$ 是左 A -模同态。注意到, 左 T -模的序列 $0 \rightarrow \begin{pmatrix} M'_1 \\ M'_2 \end{pmatrix}_{\varphi^{M'}}$ $\rightarrow \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ $\rightarrow \begin{pmatrix} M''_1 \\ M''_2 \end{pmatrix}_{\varphi^{M''}}$ $\rightarrow 0$ 正合当且仅当序列 $0 \rightarrow M'_1 \rightarrow M_1 \rightarrow M''_1 \rightarrow 0$ 和 $0 \rightarrow M'_2 \rightarrow M_2 \rightarrow M''_2 \rightarrow 0$ 正合。

定义范畴 $\text{LM}(A)$ 和 $\text{LM}(B)$ 的积 $\text{LM}(A) \times \text{LM}(B)$ 是如下范畴: 其对象为有序对 (M, N) , 其中 $M \in \text{LM}(A)$, $N \in \text{LM}(B)$ 。任取 $\text{LM}(A) \times \text{LM}(B)$ 中的对象 (M, N) 和 (M', N') , 态射集

$$\text{Hom}_{\text{LM}(A) \times \text{LM}(B)}((M, N), (M', N')) := \text{Hom}_A(M, M') \times \text{Hom}_B(N, N')$$

对任意态射 $(f, g): (M, N) \rightarrow (M', N')$ 和 $(f', g'): (M', N') \rightarrow (M'', N'')$, 态射的合成成为 $(f', g')(f, g): = (f'f, g'g)$ 。

以下是我们要用到的范畴 $\text{LM}(T)$ 与 $\text{LM}(A) \times \text{LM}(B)$ 之间的几个函子:

$$p: \text{LM}(A) \times \text{LM}(B) \rightarrow \text{LM}(T), p(M_1, M_2) = \begin{pmatrix} M_1 \\ (U \otimes_A M_1) \oplus M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^{M_1}}, \text{ 其中 } \varphi^{M_1}: U \otimes_A M_1 \rightarrow (U \otimes_A M_1) \oplus M_2$$

的标准单射; 对任意态射 (f_1, f_2) 有

$$p(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} f_1 \\ (1 \otimes_A f_1) \oplus f_2 \end{pmatrix}.$$

$h: \text{LM}(A) \times \text{LM}(B) \rightarrow \text{LM}(T)$,

$$h(M_1, M_2) = \begin{pmatrix} M_1 \oplus \text{Hom}_B(U, M_2) \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^*},$$

其中 $\varphi^*: U \otimes_A (M_1 \oplus \text{Hom}_B(U, M_2)) \rightarrow M_2$, 使得对任意 $m \in M_1, u \in U, g \in \text{Hom}_B(U, M_2)$, $\varphi^*((u \otimes m, u \otimes g)) = g(u)$. 因此, 定义 $\widetilde{\varphi}^*: M_1 \oplus \text{Hom}_B(U, M_2) \rightarrow \text{Hom}_B(U, M_2)$ 的标准投射, 其中对任意 $m \in M_1, u \in U, g \in \text{Hom}_B(U, M_2)$, $\widetilde{\varphi}^*(m, g)(u) = \varphi^*((u \otimes m), (u \otimes g)) = g(u)$; 对任意态射 (f_1, f_2) 有

$$h(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} f_1 \oplus \text{Hom}_B(U, f_2) \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

定义 $q: \text{LM}(T) \rightarrow \text{LM}(A) \times \text{LM}(B)$ 为

$$q\left(\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^m}\right) = (M_1, M_2),$$

且对 $\text{LM}(T)$ 中的任意态射 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ 有

$$q\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\right) = (f_1, f_2).$$

因此 $(p, q), (q, h)$ 均为伴随对, 从而 q 是正合函子, p 保持投射对象, h 保持内射对象^[10].

1 n -Ding 投射模

定义 1^[13] 设 n 是一固定的正整数. 称左 R -模 M 是 n -Ding 投射模, 如果存在投射模的正合列

$$\mathbf{P}: \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P_{-1} \rightarrow P_{-2} \rightarrow \cdots$$

使得 $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P_{-1})$, 且对任意平坦模 F 和整数 $i \geq -n, H_i(\text{Hom}_R(\mathbf{P}, F)) = 0$.

引理 1^[8] 设 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^m}$ 是左 T -模, 则 M 是投射模当且仅当 M_1 是投射左 A -模, $M_2/\text{Im } \varphi^m$ 是投射左 B -模, 且 φ^m 是单同态.

引理 2^[14] 设 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^m}$ 是左 T -模, 则 M 是平坦模当且仅当 M_1 是平坦左 A -模, $M_2/\text{Im } \varphi^m$ 是平坦左 B -模, 且 φ^m 是单同态.

下面讨论形式下三角矩阵环 T 上 n -Ding 投射模的相关性质.

定理 1 设 U_A 有有限的平坦维数, ${}_B U$ 是平坦模, $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^m}$ 是左 T -模.

(i) 若 M 是 n -Ding 投射模, 则 M_1 是 $(n-1)$ -Ding 投射左 A -模, φ^m 是单同态, 且 $M_2/\text{Im } \varphi^m$ 是 n -Ding 投射左 B -模;

(ii) 若 M_1 是 n -Ding 投射左 A -模, φ^m 是单同态, 且 $M_2/\text{Im } \varphi^m$ 是 n -Ding 投射左 B -模, 则 M 是 n -Ding 投射左 T -模.

证明 (i) 存在投射左 T -模的正合列

$$\Delta: \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} P^1_1 \\ P^1_2 \end{pmatrix}_{\varphi^1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial^1_1 \\ \partial^1_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} P^0_1 \\ P^0_2 \end{pmatrix}_{\varphi^0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial^0_1 \\ \partial^0_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} P^{-1}_1 \\ P^{-1}_2 \end{pmatrix}_{\varphi^{-1}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial^{-1}_1 \\ \partial^{-1}_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} P^{-2}_1 \\ P^{-2}_2 \end{pmatrix}_{\varphi^{-2}} \rightarrow \cdots$$

使得 $M \cong \text{Im} \begin{pmatrix} \partial^0_1 \\ \partial^0_2 \end{pmatrix}$, 且对任意平坦左 T -模 H 和整数 $i \geq -n, H_i(\text{Hom}_T(\Delta, H)) = 0$.

由引理 1 可得投射左 A -模的正合列

$$\Delta_1: \cdots \rightarrow P^1 \xrightarrow{\partial_1} P^0 \xrightarrow{\partial_0} P^{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} P^{-2} \rightarrow \cdots,$$

其中 $M_1 \cong \text{Im } \partial_1^0$. 任取平坦左 A -模 F , 则存在左 T -模的正合列

$$0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ U \otimes_A F \end{pmatrix}_0 \rightarrow \begin{pmatrix} F \\ U \otimes_A F \end{pmatrix}_{\varphi^F} \rightarrow \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}_0 \rightarrow 0,$$

其中 $\varphi^F: U \otimes_A F \rightarrow U \otimes_A F$ 是同构. 因此可诱导复形的短正合列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_T\left(\Delta, \begin{pmatrix} 0 \\ U \otimes_A F \end{pmatrix}_0\right) \rightarrow \text{Hom}_T\left(\Delta, \begin{pmatrix} F \\ U \otimes_A F \end{pmatrix}_{\varphi^F}\right) \rightarrow \text{Hom}_T\left(\Delta, \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}_0\right) \rightarrow 0.$$

由引理 2 可知, $\begin{pmatrix} F \\ U \otimes_A F \end{pmatrix}_{\varphi^F}$ 是平坦左 T -模. 故对任意整数 $i \geq -n$, $H_i\left(\text{Hom}_T\left(\Delta, \begin{pmatrix} F \\ U \otimes_A F \end{pmatrix}_{\varphi^F}\right)\right) = 0$. 又因

为 ${}_B U$ 是平坦模, 所以 $U \otimes_A F$ 是平坦左 B -模, 故 $\begin{pmatrix} 0 \\ U \otimes_A F \end{pmatrix}_0$ 是平坦左 T -模. 因此对任意整数 $i \geq -n$,

$H_i\left(\text{Hom}_T\left(\Delta, \begin{pmatrix} 0 \\ U \otimes_A F \end{pmatrix}_0\right)\right) = 0$. 再利用长正合序列引理, 可知对任意整数 $i \geq -n + 1$,

$H_i\left(\text{Hom}_T\left(\Delta, \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}_0\right)\right) = 0$. 对任意 $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} P^m_1 \\ P^m_2 \end{pmatrix}_{\varphi^m}, \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}_0\right) &\cong \text{Hom}_T\left(p(P^m_1, P^m_2 / \text{Im } \varphi^m), \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}_0\right) \cong \text{Hom}_{\text{LM}(A) \times \text{LM}(B)}\left((P^m_1, P^m_2 / \text{Im } \varphi^m), q\left(\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}_0\right)\right) \\ &\cong \text{Hom}_A(P^m_1, F). \end{aligned}$$

故对任意整数 $i \geq -n + 1$, $H_i(\text{Hom}_A(\Delta_1, F)) \cong H_i\left(\text{Hom}_T\left(\Delta, \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}_0\right)\right) = 0$, 即 M_1 是 $(n - 1)$ -Ding 投射左 A -模.

设序列 Δ 中, $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}: M \rightarrow \begin{pmatrix} P^{-1}_1 \\ P^{-1}_2 \end{pmatrix}_{\varphi^{-1}}$ 是包含同态, 考虑如下交换图.

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_A M_1 & \xrightarrow{1 \otimes \lambda_1} & U \otimes_A P^{-1}_1 \\ \varphi^M \downarrow & & \downarrow \varphi^{-1} \\ M_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & P_2. \end{array}$$

因为 $\text{fd}U_A < +\infty$, 由文献[10]的引理 2.3 可知序列 $U \otimes_A \Delta_1$ 正合, 所以图中 $1 \otimes \lambda_1$ 是单同态. 再由引理 1 知, φ^{-1} 是单同态, 故 φ^M 是单同态.

对任意 $j \in \mathbb{Z}$, 存在同态 $\overline{\partial^j_2}: P^j_2 / \text{Im } \varphi^j \rightarrow P^{j-1}_2 / \text{Im } \varphi^{j-1}$, 使得行正合的下图可交换

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow U \otimes_A P^1_1 & \xrightarrow{\varphi^1} & P^1_2 & \longrightarrow & P^1_2 / \text{Im } \varphi^1 \longrightarrow 0 \\ 1 \otimes \partial^1_1 \downarrow & & \partial^1_2 \downarrow & & \overline{\partial^1_2} \downarrow \\ 0 \rightarrow U \otimes_A P^0_1 & \xrightarrow{\varphi^0} & P^0_2 & \longrightarrow & P^0_2 / \text{Im } \varphi^0 \longrightarrow 0 \\ 1 \otimes \partial^0_1 \downarrow & & \partial^0_2 \downarrow & & \overline{\partial^0_2} \downarrow \\ 0 \rightarrow U \otimes_A P^{-1}_1 & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & P^{-1}_2 & \longrightarrow & P^{-1}_2 / \text{Im } \varphi^{-1} \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

由第一列和第二列的正合性及长正合序列引理, 可得投射左 B -模的正合列

$$\overline{\Delta}_2: \cdots \rightarrow P^1_2 / \text{Im } \varphi^1 \xrightarrow{\overline{\partial^1_2}} P^0_2 / \text{Im } \varphi^0 \xrightarrow{\overline{\partial^0_2}} P^{-1}_2 / \text{Im } \varphi^{-1} \rightarrow \cdots,$$

其中 $M_2/\text{Im } \varphi^m \cong \text{Im } \overline{\partial^0_2}$. 任取平坦左 B -模 G , 由引理 2 可知 $\begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}_0$ 是平坦左 T -模, 故对任意整数 $i \geq -n$,

$$H_i\left(\text{Hom}_T\left(\Delta, \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}_0\right)\right) = 0.$$

对任意 $m \in \mathbb{Z}$, 由函子 p, q 的伴随性, 得

$$\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} P^m \\ P^m \end{pmatrix}_{\varphi^m}, \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}_0\right) \cong \text{Hom}_B(P^m/\text{Im } \varphi^m, G).$$

故对任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_B(\overline{\Delta}_2, G)) \cong H_i\left(\text{Hom}_T\left(\Delta, \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}_0\right)\right) = 0$, 从而 $M_2/\text{Im } \varphi^m$ 是 n -Ding 投射左 B -模。

(ii) 因为 $\varphi^m: U \otimes_A M_1 \rightarrow M_2$ 是单同态, 所以存在左 T -模的正合列

$$0 \rightarrow \begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \end{pmatrix}_{\varphi^{M_1}} \rightarrow \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ M_2/\text{Im } \varphi^m \end{pmatrix}_0 \rightarrow 0,$$

其中 $\varphi^{M_1}: U \otimes_A M_1 \rightarrow U \otimes_A M_1$ 是同构。又因为 M_1 是 n -Ding 投射左 A -模, 所以存在投射左 A -模的正合列

$$\Lambda: \dots \rightarrow P^1 \xrightarrow{f^1} P^0 \xrightarrow{f^0} P^{-1} \xrightarrow{f^{-1}} P^{-2} \rightarrow \dots,$$

使得 $M_1 \cong \text{Im } f^0$, 且对任意平坦左 A -模 F , 任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_A(\Lambda, F)) = 0$. 因为 $\text{fd}U_A < +\infty$, 所以序列 $U \otimes_A \Lambda$ 正合, 因此可得投射左 T -模的正合列

$$\Upsilon: \dots \rightarrow \begin{pmatrix} P^1 \\ U \otimes_A P^1 \end{pmatrix}_{\varphi^{P^1}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f^1 \\ 1 \otimes f^1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} P^0 \\ U \otimes_A P^0 \end{pmatrix}_{\varphi^{P^0}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f^0 \\ 1 \otimes f^0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} P^{-1} \\ U \otimes_A P^{-1} \end{pmatrix}_{\varphi^{P^{-1}}} \rightarrow \dots,$$

其中 $\begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \end{pmatrix}_{\varphi^{M_1}} \cong \text{Im} \begin{pmatrix} f^0 \\ 1 \otimes f^0 \end{pmatrix}$. 对任意平坦左 T -模 $H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}_{\varphi^H}$, 由引理 2 可知, H_1 是平坦左 A -模。对任

意 $m \in \mathbb{Z}$, 注意到 $\begin{pmatrix} P^m \\ U \otimes_A P^m \end{pmatrix}_{\varphi^{P^m}} = p(P^m, 0)$, 由函子 p, q 的伴随性可知

$$\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} P^m \\ U \otimes_A P^m \end{pmatrix}_{\varphi^{P^m}}, \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}_{\varphi^H}\right) \cong \text{Hom}_T\left(p(P^m, 0), \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}_{\varphi^H}\right) \cong \text{Hom}_{\text{LM}(A) \times \text{LM}(B)}\left((P^m, 0), q\left(\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}_{\varphi^H}\right)\right) \cong \text{Hom}_A(P^m, H_1),$$

故对任意整数 $i \geq -n$, $H_i\left(\text{Hom}_T\left(\Upsilon, \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}_{\varphi^H}\right)\right) \cong H_i(\text{Hom}_A(\Lambda, H_1)) = 0$. 即左 T -模 $\begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \end{pmatrix}_{\varphi^{M_1}}$ 是 n -Ding 投射模。

因为左 B -模 $M_2/\text{Im } \varphi^m$ 是 n -Ding 投射模, 所以存在投射模的正合列

$$\Theta: \dots \rightarrow Q^1 \xrightarrow{\alpha^1} Q^0 \xrightarrow{\alpha^0} Q^{-1} \xrightarrow{\alpha^{-1}} Q^{-2} \rightarrow \dots,$$

使得 $M_2/\text{Im } \varphi^m \cong \text{Im } \alpha^0$, 且对任意平坦左 B -模 G , 任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_B(\Theta, G)) = 0$. 因此可得投射左 T -模的正合列

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Theta \end{pmatrix}: \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ Q^1 \end{pmatrix}_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ Q^0 \end{pmatrix}_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ Q^{-1} \end{pmatrix}_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^{-1} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ Q^{-2} \end{pmatrix}_0 \rightarrow \dots,$$

其中 $\begin{pmatrix} 0 \\ M_2/\text{Im } \varphi^m \end{pmatrix}_0 \cong \text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^0 \end{pmatrix}$. 任取平坦左 T -模 $\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}_{\varphi^H}$, 由引理 2 可知, 在左 B -模的正合列

$0 \rightarrow U \otimes_A H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow H_2/\text{Im } \varphi^m \rightarrow 0$ 中, $H_2/\text{Im } \varphi^m$ 是平坦模, 又因为 ${}_B U$ 是平坦模, 故 $U \otimes_A H_1$ 是平坦

模, 因此 H_2 也是平坦模。对任意 $m \in \mathbb{Z}$, 由函子 p, q 的伴随性, 可知 $\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ Q^m \end{pmatrix}_0, \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}_{\varphi^H}\right)$

$\cong \text{Hom}_B(Q^m, H_2)$. 因此对任意整数 $i \geq -n$, $H_i\left(\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}_{\varphi^H}\right)\right) \cong H_i(\text{Hom}_B(\Theta, H_2)) = 0$, 即 $\begin{pmatrix} 0 \\ M_2/\text{Im } \varphi^m \end{pmatrix}_0$

是 n -Ding 投射左 T -模。再由文献[13]的命题 1.3 可知, 左 T -模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 n -Ding 投射模。

推论 1 设 R 是环, $T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$ 是由 R 作成的形式下三角矩阵环, $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是一左 T -模。

(i) 若 M 是 n -Ding 投射模, 则 M_1 是 $(n - 1)$ -Ding 投射左 R -模, φ^M 是单同态, 且 $M_2/\text{Im } \varphi^M$ 是 n -Ding 投射左 R -模;

(ii) 若 $M_1, M_2/\text{Im } \varphi^M$ 是 n -Ding 投射左 R -模, 且 φ^M 是单同态, 则 M 是 n -Ding 投射左 T -模。

2 n -Ding 内射模

设 Γ 是一范畴, 其对象是三元组 $W = (W_1, W_2)_{\varphi_w}$, 其中 $W_1 \in \text{RM}(A)$, $W_2 \in \text{RM}(B)$ 且 $\varphi_w: W_2 \otimes_B U \rightarrow W_1$ 是右 A -模同态。任意两个对象 $(W_1, W_2)_{\varphi_w}$ 与 $(X_1, X_2)_{\varphi_x}$ 间的态射是 $g = (g_1, g_2)$, 其中 $g_1 \in \text{Hom}_A(W_1, X_1)$, $g_2 \in \text{Hom}_B(W_2, X_2)$, 且满足 $\varphi_x(g_2 \otimes 1) = g_1 \varphi_w$ 。范畴 $\text{RM}(T)$ 与范畴 Γ 等价^[15]。我们仍以三元组 $(W_1, W_2)_{\varphi_w}$ 的形式表示右 T -模。注意到, g 是单 (满) 同态当且仅当 g_1 和 g_2 是单 (满) 同态。设 $W = (W_1, W_2)_{\varphi_w}$ 是右 T -模, 由伴随同构 $\text{Hom}_A(W_2 \otimes_B U, W_1) \cong \text{Hom}_B(W_2, \text{Hom}_A(U, W_1))$ 。任取 $w \in W_2$, $u \in U$, 定义 $\widetilde{\varphi}_w: W_2 \rightarrow \text{Hom}_A(U, W_1)$ 的作用为 $\widetilde{\varphi}_w(w)(u) = \varphi_w(w \otimes u)$, 则 $\widetilde{\varphi}_w$ 是右 B -模同态。设 $g = (g_1, g_2): (W_1, W_2)_{\varphi_w} \rightarrow (X_1, X_2)_{\varphi_x}$,

$$\begin{array}{ccc} W_2 \otimes_B U \xrightarrow{g_2 \otimes 1} X_2 \otimes_B U & & W_2 \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_w} \text{Hom}_A(U, W_1) \\ \varphi_w \downarrow & \downarrow \varphi_x & g_2 \downarrow \quad \downarrow \text{Hom}_A(U, g_1) = g_{1*} \\ W_1 \xrightarrow{g_1} X_1 & & X_2 \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_x} \text{Hom}_A(U, X_1) \end{array}$$

则由 $\widetilde{\varphi}_w$ 及 $\widetilde{\varphi}_x$ 的定义, 容易验证右图可交换。

类似地, 可以定义范畴 $\text{RM}(A)$ 和 $\text{RM}(B)$ 的积, 即范畴 $\text{RM}(A) \times \text{RM}(B)$ 以及范畴 $\text{RM}(T)$ 与 $\text{RM}(A) \times \text{RM}(B)$ 之间的几个函子:

$p: \text{RM}(A) \times \text{RM}(B) \rightarrow \text{RM}(T)$, $p(W_1, W_2) = ((W_2 \otimes_B U) \oplus W_1, W_2)_{\varphi_w}$, 其中 $\varphi_w: W_2 \otimes_B U \rightarrow (W_2 \otimes_B U) \oplus W_1$ 的标准单射; 对任意态射 (g_1, g_2) , $p(g_1, g_2) = ((g_2 \otimes_B 1) \oplus g_1, g_2)$ 。

$h: \text{RM}(A) \times \text{RM}(B) \rightarrow \text{RM}(T)$, $h(W_1, W_2) = (W_1, W_2 \oplus \text{Hom}_A(U, W_1))_{\varphi_{w_1}}$, 其中 $\widetilde{\varphi}_{w_1}: W_2 \oplus \text{Hom}_A(U, W_1) \rightarrow \text{Hom}_A(U, W_1)$ 的标准投射; 对任意态射 (g_1, g_2) , $h(g_1, g_2) = (g_1, g_2 \oplus \text{Hom}_A(U, g_1))$ 。

$q: \text{RM}(T) \rightarrow \text{RM}(A) \times \text{RM}(B)$, 对任意右 T -模 $W = (W_1, W_2)_{\varphi_w}$, $q((W_1, W_2)_{\varphi_w}) = (W_1, W_2)$, 且对范畴 $\text{RM}(T)$ 中的任意态射 (g_1, g_2) , $q((g_1, g_2)) = (g_1, g_2)$ 。

则 (p, q) , (q, h) 均为伴随对, 从而 q 是正合函子, p 保持投射对象, h 保持内射对象^[11]。

定义 2^[13] 设 n 是一固定的正整数。称右 R -模 N 是 n -Ding 内射模, 如果存在内射模的正合列

$$\mathbf{I}: \cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_{-1} \rightarrow I_{-2} \rightarrow \cdots,$$

使得 $N \cong \text{Im}(I_0 \rightarrow I_{-1})$, 对任意 FP -内射右 R -模 E , 任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_R(E, \mathbf{I})) = 0$ 。

称环 R 是右凝聚环, 如果每个有限生成右理想都有限表示。下面我们讨论形式下三角矩阵环 T 上 n -Ding 内射模的结构。

引理 3^[11] 设 $W = (W_1, W_2)_{\varphi_w}$ 是一右 T -模。

(i) W 是内射模当且仅当 W_1 是内射右 A -模, $\text{Ker } \widetilde{\varphi}_w$ 是内射右 B -模, 且 $\widetilde{\varphi}_w$ 是满同态;

(ii) 若 T 是右凝聚环, U_A 是有限表示模, 则 W 是 FP -内射模当且仅当 W_1 是 FP -内射右 A -模, $\text{Ker } \widetilde{\varphi}_w$ 是 FP -内射右 B -模, 且 $\widetilde{\varphi}_w$ 是满同态。

若 $W = (W_1, W_2)_{\varphi_w}$ 是右 T -模, 则 W 的示性模 $W^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(W, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \end{pmatrix}_{\varphi^{w^+}}$, 其中 $\varphi^{w^+}: U \otimes_A W_1^+ \rightarrow W_2^+$, 且对任意 $f \in W_1^+$, $u \in U$, $w \in W_2$, $\varphi^{w^+}(u \otimes f)(w) = f(\varphi_w(w \otimes u))$ 。

命题1 设 T 是右凝聚环, U_A 是有限表示模, 且 $\text{fd}_B U < +\infty$. 若 J 是 FP -内射右 A -模, 则右 T -模 $(J, 0)_0$ 的 FP -内射维数有限.

证明 不妨设 $\text{fd}_B U = m < +\infty$. 由右 T -模的序列

$$0 \rightarrow (J, 0)_0 \rightarrow (J, \text{Hom}_A(U, J))_{\varphi_J} \rightarrow (0, \text{Hom}_A(U, J))_0 \rightarrow 0,$$

的正合性, 可诱导出左 T -模的正合列

$$0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Hom}_A(U, J)^+ \end{pmatrix}_0 \rightarrow \begin{pmatrix} J^+ \\ \text{Hom}_A(U, J)^+ \end{pmatrix}_{\varphi_{J^+}} \rightarrow \begin{pmatrix} J^+ \\ 0 \end{pmatrix}_0 \rightarrow 0,$$

因为 T 是右凝聚环, 由文献 [16] 的定理 4.2 和文献 [11] 的引理 4.2 可知 $\text{fd}(\text{Hom}_A(U, J)^+) = FP\text{-id}(\text{Hom}_A(U, J)) \leq m$, 所以 $\text{fd}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \text{Hom}_A(U, J)^+ \end{pmatrix}_0\right) \leq m$. 又因为 J^+ 是平坦左 A -模, 且 $\text{Hom}_A(U, J)^+ \cong U \otimes_A J^+$,

因此, 由引理 2 可知 $\begin{pmatrix} J^+ \\ \text{Hom}_A(U, J)^+ \end{pmatrix}_{\varphi_{J^+}}$ 是平坦模. 从而在上述正合列中 $FP\text{-id}((J, 0)_0) = \text{fd}\left(\begin{pmatrix} J^+ \\ 0 \end{pmatrix}_0\right) \leq m +$

$1 < +\infty$.

定理2 设 T 是右凝聚环, ${}_B U$ 是平坦模, U_A 是有限表示模且其投射维数有限, $W = (W_1, W_2)_{\varphi_W}$ 是右 T -模.

(i) 若 W 是 n -Ding 内射模, 则 W_1 是 $(n-1)$ -Ding 内射右 A -模, $\widetilde{\varphi}_W$ 是满同态, 且 $\text{Ker } \widetilde{\varphi}_W$ 是 n -Ding 内射右 B -模;

(ii) 若 W_1 是 n -Ding 内射右 A -模, $\widetilde{\varphi}_W$ 是满同态, 且 $\text{Ker } \widetilde{\varphi}_W$ 是 n -Ding 内射右 B -模, 则 W 是 n -Ding 内射模.

证明 (i) 存在内射右 T -模的正合列

$$\Delta: \cdots \rightarrow (I^1_1, I^1_2)_{\varphi_1} \xrightarrow{(\alpha^1_1, \alpha^1_2)} (I^0_1, I^0_2)_{\varphi_0} \xrightarrow{(\alpha^0_1, \alpha^0_2)} (I^{-1}_1, I^{-1}_2)_{\varphi_{-1}} \xrightarrow{(\alpha^{-1}_1, \alpha^{-1}_2)} (I^{-2}_1, I^{-2}_2)_{\varphi_{-2}} \rightarrow \cdots,$$

使得 $W \cong \text{Im}(\alpha^0_1, \alpha^0_2)$, 且对任意 FP -内射右 T -模 $E = (E_1, E_2)_{\varphi_E}$, 任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_T(E, \Delta)) = 0$. 由引理 3 可得内射右 A -模的正合列

$$\Delta_1: \cdots \rightarrow I^1_1 \xrightarrow{\alpha^1_1} I^0_1 \xrightarrow{\alpha^0_1} I^{-1}_1 \xrightarrow{\alpha^{-1}_1} I^{-2}_1 \rightarrow \cdots,$$

其中 $W_1 \cong \text{Im } \alpha^0_1$. 任取 FP -内射右 A -模 J , 则右 T -模的序列

$$0 \rightarrow (J, 0)_0 \rightarrow (J, \text{Hom}_A(U, J))_{\varphi_J} \rightarrow (0, \text{Hom}_A(U, J))_0 \rightarrow 0,$$

正合, 且对任意 $f \in \text{Hom}_A(U, J)$, $u \in U$, $\varphi_J(f \otimes u) = f(u)$, 从而 $\widetilde{\varphi}_J$ 是同构. 于是得到复形的短正合列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_T((0, \text{Hom}_A(U, J))_0, \Delta) \rightarrow \text{Hom}_T((J, \text{Hom}_A(U, J))_{\varphi_J}, \Delta) \rightarrow \text{Hom}_T((J, 0)_0, \Delta) \rightarrow 0,$$

由引理 3 可知, $(J, \text{Hom}_A(U, J))_{\varphi_J}$ 是 FP -内射右 T -模, 故对任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_T((J, \text{Hom}_A(U, J))_{\varphi_J}, \Delta)) = 0$. 因为 ${}_B U$ 是平坦模, 由文献 [11] 的引理 4.2 可知, $\text{Hom}_A(U, J)$ 是 FP -内射右 B -模, 故 $(0, \text{Hom}_A(U, J))_0$ 是 FP -内射右 T -模, 因此对任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_T((0, \text{Hom}_A(U, J))_0, \Delta)) = 0$. 利用长正合序列引理可知, 对任意整数 $i \geq -n + 1$, $H_i(\text{Hom}_T((J, 0)_0, \Delta)) = 0$. 对任意 $m \in \mathbb{Z}$, 由

$$\begin{aligned} \text{Hom}_T((J, 0)_0, (I^m_1, I^m_2)_{\varphi_m}) &\cong \text{Hom}_T((J, 0)_0, h(I^m_1, \text{Ker } \widetilde{\varphi}_m)) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{RM}(A) \times \text{RM}(B)}(q((J, 0)_0), (I^m_1, \text{Ker } \widetilde{\varphi}_m)) \cong \text{Hom}_A(J, I^m_1), \end{aligned}$$

故对任意整数 $i \geq -n + 1$, $H_i(\text{Hom}_T((J, 0)_0, \Delta)) \cong H_i(\text{Hom}_A(J, \Delta_1)) = 0$, 因此 W_1 是 $(n-1)$ -Ding 内射右 A -模.

设 $(\pi_1, \pi_2): (I^0_1, I^0_2)_{\varphi_0} \rightarrow W$ 是序列 Δ 中的满同态, 考虑如下交换图.

$$\begin{array}{ccc} I^0_2 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_0} & \text{Hom}_A(U, I^0_1) \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_A(U, \pi_1) = \pi_{1*} \\ W_2 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_W} & \text{Hom}_A(U, W_1) \end{array}$$

因为 $\text{pd}U_A < +\infty$, 所以由文献 [10] 的引理 2.5 可知, 序列 $\text{Hom}_A(U, \Delta_1)$ 正合, 故 π_{1*} 是满同态. 又因为 $(I^0_1, I^0_2)_{\varphi_0}$ 是内射右 T -模, 所以由引理 3 可知 $\widetilde{\varphi}_0$ 是满同态. 因此 $\widetilde{\varphi}_W$ 是满同态.

对任意 $j \in \mathbb{Z}$, 存在态射 $\rho^j: \text{Ker } \widetilde{\varphi}_j \rightarrow \text{Ker } \widetilde{\varphi}_{j-1}$, 使得行正合的下图可交换。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \widetilde{\varphi}_1 & \longrightarrow & I^1_2 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_1} & \text{Hom}_A(U, I^1_1) \longrightarrow 0 \\
 & & \rho^1 \downarrow & & \alpha^1_2 \downarrow & & \alpha^1_{1*} \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \widetilde{\varphi}_0 & \longrightarrow & I^0_2 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_0} & \text{Hom}_A(U, I^0_1) \longrightarrow 0 \\
 & & \rho^0 \downarrow & & \alpha^0_2 \downarrow & & \alpha^0_{1*} \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \widetilde{\varphi}_{-1} & \longrightarrow & I^{-1}_2 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_{-1}} & \text{Hom}_A(U, I^{-1}_1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

由第二列和第三列的正合性及长正合序列引理, 可得内射右 B -模的正合列

$$E: \cdots \rightarrow \text{Ker } \widetilde{\varphi}_1 \xrightarrow{\rho^1} \text{Ker } \widetilde{\varphi}_0 \xrightarrow{\rho^0} \text{Ker } \widetilde{\varphi}_{-1} \xrightarrow{\rho^{-1}} \text{Ker } \widetilde{\varphi}_{-2} \rightarrow \cdots,$$

其中 $\text{Ker } \widetilde{\varphi}_w \cong \text{Im } \rho^0$. 任取 FP -内射右 B -模 L , 由引理 3 可知, $(0, L)_0$ 是 FP -内射右 T -模, 故对任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_T((0, L)_0, \Delta)) = 0$. 对任意 $m \in \mathbb{Z}$, 由函子 q, h 的伴随性可知, $\text{Hom}_T((0, L)_0, (I^m_1, I^m_2)_{\varphi_m}) \cong \text{Hom}_B(L, \text{Ker } \widetilde{\varphi}_m)$. 故对任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_B(L, E)) \cong H_i(\text{Hom}_T((0, L)_0, \Delta)) = 0$, 这表明 $\text{Ker } \widetilde{\varphi}_w$ 是 n -Ding 内射右 B -模。

(ii) 因为 $\widetilde{\varphi}_w: W_2 \rightarrow \text{Hom}_A(U, W_1)$ 是满同态, 所以存在右 T -模的正合列

$$0 \rightarrow (0, \text{Ker } \widetilde{\varphi}_w)_0 \rightarrow (W_1, W_2)_{\varphi_w} \rightarrow (W_1, \text{Hom}_A(U, W_1))_{\varphi_{w_1}} \rightarrow 0, \quad (*)$$

其中对任意 $g \in \text{Hom}_A(U, W_1), u \in U, \varphi_{w_1}(g \otimes u) = g(u)$, 从而 φ_{w_1} 是同构。又因为 W_1 是 n -Ding 内射右 A -模, 故存在内射右 A -模的正合列

$$\Lambda: \cdots \rightarrow I_1 \xrightarrow{d_1} I_0 \xrightarrow{d_0} I_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} I_{-2} \rightarrow \cdots,$$

使得 $W_1 \cong \text{Im } d_0$, 且对任意 FP -内射右 A -模 E , 任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_A(E, \Lambda)) = 0$. 因为 $\text{pd } U_A < +\infty$, 所以序列 $\text{Hom}_A(U, \Lambda)$ 正合, 于是可得内射右 T -模的正合列

$$\Upsilon: \cdots \rightarrow (I_1, \text{Hom}_A(U, I_1))_{\varphi_{I_1}} \xrightarrow{(d_1, d_{1*})} (I_0, \text{Hom}_A(U, I_0))_{\varphi_{I_0}} \xrightarrow{(d_0, d_{0*})} (I_{-1}, \text{Hom}_A(U, I_{-1}))_{\varphi_{I_{-1}}} \rightarrow \cdots,$$

其中 $(W_1, \text{Hom}_A(U, W_1))_{\varphi_{w_1}} \cong \text{Im } (d_0, d_{0*})$. 任取 FP -内射右 T -模 $J = (J_1, J_2)_{\varphi_J}$, 对任意 $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_T((J_1, J_2)_{\varphi_J}, (I_m, \text{Hom}_A(U, I_m))_{\varphi_{I_m}}) &\cong \text{Hom}_T((J_1, J_2)_{\varphi_J}, h(I_m, 0)) \\
 &\cong \text{Hom}_{\text{RM}(A) \times \text{RM}(B)}(q((J_1, J_2)_{\varphi_J}), (I_m, 0)) \cong \text{Hom}_A(J_1, I_m).
 \end{aligned}$$

由引理 3 可知 J_1 是 FP -内射右 A -模, 故 $H_i(\text{Hom}_T((J_1, J_2)_{\varphi_J}, \Upsilon)) \cong H_i(\text{Hom}_A(J_1, \Lambda)) = 0 (\forall i \geq -n)$. 因此右 T -模 $(W_1, \text{Hom}_A(U, W_1))_{\varphi_{w_1}}$ 是 n -Ding 内射模。

因为右 B -模 $\text{Ker } \widetilde{\varphi}_w$ 是 n -Ding 内射模, 故存在内射模的正合列

$$\Theta: \cdots \rightarrow Q_1 \xrightarrow{\alpha_1} Q_0 \xrightarrow{\alpha_0} Q_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} Q_{-2} \rightarrow \cdots,$$

使得 $\text{Ker } \widetilde{\varphi}_w \cong \text{Im } \alpha_0$, 且对任意 FP -内射右 B -模 L , 任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_B(L, \Theta)) = 0$. 因此可得内射右 T -模的正合列

$$(0, \Theta): \cdots \rightarrow (0, Q_1)_0 \xrightarrow{(0, \alpha_1)} (0, Q_0)_0 \xrightarrow{(0, \alpha_0)} (0, Q_{-1})_0 \xrightarrow{(0, \alpha_{-1})} (0, Q_{-2})_0 \rightarrow \cdots,$$

其中 $(0, \text{Ker } \widetilde{\varphi}_w)_0 \cong \text{Im } (0, \alpha_0)$. 任取 FP -内射右 T -模 $J = (J_1, J_2)_{\varphi_J}$, 则在右 B -模的正合列 $0 \rightarrow \text{Ker } \widetilde{\varphi}_J \rightarrow J_2 \rightarrow \text{Hom}_A(U, J_1) \rightarrow 0$ 中, $\text{Ker } \widetilde{\varphi}_J$ 是 FP -内射模, 又因为 ${}_B U$ 是平坦模, 由文献 [11] 的引理 4.2 可知 $\text{Hom}_A(U, J_1)$ 是 FP -内射模, 所以 J_2 也是 FP -内射模。对任意 $m \in \mathbb{Z}$, 由函子 q, h 的伴随性可知, $\text{Hom}_T((J_1, J_2)_{\varphi_J}, (0, Q_m)_0) \cong \text{Hom}_B(J_2, Q_m)$. 因此对任意整数 $i \geq -n$, $H_i(\text{Hom}_T((J_1, J_2)_{\varphi_J}, (0, \Theta))) \cong H_i(\text{Hom}_B(J_2, \Theta)) = 0$. 故 $(0, \text{Ker } \widetilde{\varphi}_w)_0$ 是 n -Ding 内射右 T -模。

综上, 再由文献[13]的命题2.3可知在正合列(*)中, 右 T -模 $W = (W_1, W_2)_{\varphi_w}$ 是 n -Ding 内射模。

推论2 设 R 是右凝聚环, $T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$ 是由 R 作成的形式下三角矩阵环, $W = (W_1, W_2)_{\varphi_w}$ 是一右 T -模。

(i) 若 W 是 n -Ding 内射模, 则 W_1 是 $(n-1)$ -Ding 内射右 R -模, $\widetilde{\varphi_w}$ 是满同态, 且 $\text{Ker } \widetilde{\varphi_w}$ 是 n -Ding 内射右 R -模;

(ii) 若 $W_1, \text{Ker } \widetilde{\varphi_w}$ 是 n -Ding 内射右 R -模, $\widetilde{\varphi_w}$ 是满同态, 则 W 是 n -Ding 内射右 T -模。

证明 由文献[16]的推论4.5可知 T 是右凝聚环, 再由定理2易见结论成立。

参考文献:

- [1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1995, 220(4): 611–633.
- [2] ENOCHS E E, JENDA O M G. *Relative homological algebra* [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2000.
- [3] MAO L X, DING N Q. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2008, 7(4): 491–506.
- [4] DING N Q, LI Y L, MAO L X. Strongly Gorenstein flat modules [J]. *Journal of Australian Mathematical Society*, 2009, 86(3): 323–338.
- [5] GILLESPIE J. Model structures on modules over Ding-Chen rings [J]. *Homology, Homotopy and Applications*, 2010, 12(1): 61–73.
- [6] TANG X. Applications of n -Gorenstein projective and injective modules [J]. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2015, 44(6): 1435–1443.
- [7] HAGHANY A, VARADARAJAN K. Study of formal triangular matrix rings [J]. *Journal of Communications in Algebra*, 1999, 27(11): 5507–5525.
- [8] HAGHANY A, VARADARAJAN K. Study of modules over formal triangular matrix rings [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2000, 147(1): 41–58.
- [9] ZHANG P. Gorenstein-projective modules and symmetric recollements [J]. *Journal of Algebra*, 2013, 388: 65–80.
- [10] ENOCHS E E, CORTÉS-IZURDIAGA M, TORRECILLAS B. Gorenstein conditions over triangular matrix rings [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2014, 218(8): 1544–1554.
- [11] MAO L X. Ding modules and dimensions over formal triangular matrix rings [OL]. <https://arxiv.org/abs/1912.06968>.
- [12] GREEN E L. On the representation theory of rings in matrix form [J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 1982, 100(1): 123–138.
- [13] 张铭, 张文汇. n -Ding 投射和 n -Ding 内射模 [J]. *山东大学学报(理学版)*, 2019, 54(4): 60–66.
- [14] FOSSUM R M, GRIFFITH P, REITEN I. *Trivial extensions of Abelian categories* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
- [15] ASADOLLAHI J, SALARIAN S. On the vanishing of Ext over formal triangular matrix rings [J]. *Forum Mathematicum*, 2006, 18(6): 951–966.
- [16] HAGHANY A, MAZROOEI M, VEDADI M R. Pure projectivity and pure injectivity over formal triangular matrix rings [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2012, 11(6): 1250107.

(责任编辑 冯兆永)